d'où : $\begin{cases} a'b' = 20 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$ et par suite {a'b'} = { 1 , 20} ou { 4 , 5}

et par suite {a,b} = { 12 , 240} ou { 48,60}

2°cas d = 23 $\Rightarrow$ m = 207 alors $\begin{cases} a'b' = 9 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$

{a',b'} = {1,9} $\Rightarrow$ {a,b} = {23,207}

Conclusion : Les paires solutions du problème posé sont : {12 , 204} ; {48 , 60} ; {23 , 207}

Solution 12 :

1°/ On a : $5 \times 1 - 3 \times 1 = 2$

d'où $5x - 3y = 2 \Leftrightarrow 5x - 3y = 5 \times 1 - 3 \times 1 \Leftrightarrow 5(x - 1) = 3(y - 1)$

or 3 divise 5(x – 1) et $3 \wedge 5 = 1$

d'où d'après le lemme de Gauss 3 divise x – 1 et par suite il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$x - 1 = 3k$ et par suite $x = 3k + 1$

l'équation s'écrit : $5(3k) = 3(y - 1)$ d'où $y = 5k + 1$

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(3k + 1 , 5k + 1) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$

2°/ $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ x \wedge y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 5k + 1 \\ x \wedge y = 2 \end{cases}$

$x \wedge y = 2 \Leftrightarrow 3k + 1 \wedge 5k + 1 = 2$

ou d'après l'algorithme d'Euclide on a :

$(3k + 1) \wedge (5k + 1) = (3k + 1) \wedge 2k = k + 1 \wedge 2k = (k + 1) \wedge 2$

$x \wedge y = 2 \Leftrightarrow (k + 1) \wedge 2 = 2 \Leftrightarrow k + 1$ est pair

$\Leftrightarrow k + 1 = 2p \Leftrightarrow k = 2p - 1$ où $p \in \mathbb{Z}$

d'où $x = 3(2p - 1) + 1 = 6p - 2$